PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

durée : 4 heures

Option MP-MP*

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour cette épreuve.

* * *

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

Le problème porte sur l'étude d'applications linéaires agissant comme une moyenne sur des suites ou des fonctions. On notera par la suite :

- S l'espace vectoriel des suites réelles. On note $(u_n)_{n\geq 0} = (u_n)$ les éléments de S.
- S_b l'espace vectoriel des éléments bornés de S. On munit S_b de la norme définie par $N_\infty((u_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$
- $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}_b$ l'espace vectoriel formé des éléments de $\mathcal{C}$ bornés sur $\mathbb{R}_+$. On munit cet espace vectoriel de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\geq 0} |f(x)|$.
- L^2 l'espace vectoriel des applications f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ continues telles que $|f|^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour f dans L^2, on pose $||f||_2 = \Big(\int_{]0,+\infty[} |f|^2\Big)^{1/2}$.

Question préliminaire :
Soit f un élément de $\mathcal{C}$. Montrer que l'application g définie par

$$g(0) = f(0) \text{ et } \forall x > 0 \ \ g(x) = \frac{1}{x}\int_{[0,x]} f$$

est un élément de $\mathcal{C}$.
fin de la question préliminaire

Pour tout le problème, on définit les applications suivantes

(i) $h : S \to S$, $h((u_n)) = (v_n)$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(ii) $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ par

$$H(f)(0) = f(0) \text{ et } \forall x > 0, \ \ H(f)(x) = \frac{1}{x}\int_{[0,x]} f.$$

Pour $(E, ||\ ||)$ un espace vectoriel normé, on note $L_c(E)$ l'espace des endomorphismes continus de E. On rappelle que l'application $|||\ |||$ définie par

$$\forall \phi \in L_c(E),\ \ |||\phi||| = \sup\left\{\frac{||\phi(x)||}{||x||},\ \ x \in E\backslash\{0\}\right\}.$$

est la norme d'opérateur associée sur $L_c(E)$.
S'il existe x dans $E\backslash\{0\}$ tel que $|||\phi||| = \dfrac{||\phi(x)||}{||x||}$, on dit que la norme de ϕ est atteinte en x.

I – Première partie

1. L'application h est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. (a) Pour $f \in \mathcal{C}$, montrer que $H(f)$ est continuement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) L'application H est-elle injective ?
   (c) Est-elle surjective ?
3. Trouver les éléments propres (valeurs et sous-espaces propres associés) de h.
4. Mêmes questions pour l'application H.

II – Seconde partie

Dans cette partie on munit S_b de la norme N_∞ et $\mathcal{C}_b$ de la norme $||\ ||_\infty$.

1. Montrer que S_b et $\mathcal{C}_b$ sont des sous-espaces vectoriels stables par h et H respectivement.

   Dans cette partie du problème on notera h_∞ (respectivement H_∞) l'endomorphisme induit par la restriction de h à S_b (respectivement de H à $\mathcal{C}_b$).

2. Vérifier que les applications linéaires h_∞ et de H_∞ sont continues, préciser leurs normes et montrer qu'elles sont atteintes.
3. Soit (u_n) une suite croissante de réels positifs convergente vers une limite λ.
   (a) Etablir que la suite $h_\infty((u_n))$ converge vers λ.
   (b) Montrer que $N_\infty(h_\infty((u_n))) = N_\infty((u_n))$.
4. Soit (u_n) un élément non nul de S_b tel que $|u_0| \neq N_\infty((u_n))$, et on suppose que $|||h_\infty|||$ est atteinte en (u_n).
   (a) Montrer que la suite $(|u_n|)$ vérifie $N_\infty((|u_n|)) = N_\infty(h_\infty((|u_n|)))$.
   (b) On suppose que le réel $N_\infty((|u_n|))$ n'est pas valeur d'adhérence de $(|u_n|)$, c'est à dire

   $$\exists c \in [0, N_\infty((|u_n|))[,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ /\ \ \forall n \geq n_0,\ \ |u_n| \leq c.$$

   Etablir que $N_\infty(h_\infty((|u_n|))) < N_\infty((|u_n|))$.
   (c) En déduire que $N_\infty((|u_n|))$ est une valeur d'adhérence de la suite $(|u_n|)$.
5. Soit f un élément de $\mathcal{C}_b$ admettant une limite en $+\infty$. Montrer que $H_\infty(f)$ admet une limite en $+\infty$ dont on précisera la valeur.

III – Troisième partie

Dans cette partie on note $H^0 = Id$ et, pour tout entier $p \geq 1$, $H^p = H^{p-1} o H$.

1. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}$. On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall y \in [0,x],\ f(y) \leq g(y)$. Montrer que $\forall y \in [0,x],\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ H^p(f)(y) \leq H^p(g)(y)$.
2. Pour tout réel a on definit l'application f_a par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_a(x) = ax$.
   Soient a un réel et $x \geq 0$, montrer que la suite $(H^p(f_a)(x))_{p\geq 0}$ converge.
3. Soient $f \in \mathcal{C}$ tel que $f(0) = 0$ et $x \geq 0$.
   (a) Pour $\varepsilon > 0$ donné, établir l'existence de $\alpha > 0$ tel que
   $$\forall y \in [0,x],\quad |f(y)| \leq \varepsilon + f_\alpha(y).$$
   (b) En déduire que la suite $(H^p(f)(x))_{p\geq 0}$ converge vers 0.
4. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}$, la suite de fonctions $(H^p(f))_{p\geq 0}$ converge simplement vers un élément de $\mathcal{C}$ que l'on déterminera. Améliorer le résultat en prouvant que la convergence est uniforme sur tout intervalle du type $[0,A], A \geq 0$.
5. Dans la question précédente, la convergence est-elle toujours uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
6. Soit $f \in \mathcal{C}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, et F la limite de la suite $(H^p(f))_{p\geq 0}$.
   Montrer que pour tout $A \geq 0$, il existe $K_A \geq 0$ tel que
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*,\quad \sup_{0\leq x\leq A} |H^p(f)(x) - F(x)| \leq \frac{K_A}{2^p}.$$
7. Montrer sur un exemple que le résutat de la question précédente peut tomber en défaut si on ne suppose plus f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

IV – Quatrième partie

1. Etablir que, pour tout couple (f,g) d'éléments de L^2, le produit fg est sommable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'application
   $$(f,g) \to \int_{]0,+\infty[} f(t)g(t)dt$$
   définit un produit scalaire sur L^2.

   En conséquence, $(L^2, ||\ ||_2)$ est donc un espace vectoriel normé.
2. Soit f un élément de L^2.
   (a) Etablir que pour tout $x > 0$ la fonction f est sommable sur $]0,x]$ et que
   $$\frac{1}{x}\left(\int_{]0,x]} f(t)dt\right)^2 \leq \int_{]0,x]} f^2(t)dt.$$
   (b) Soit $\phi_f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{]0,x]} f(t)dt$.
   A l'aide d'une intégration par parties, montrer que ϕ_f appartient à L^2 et qu'il existe une constante $K > 0$ telle que
   $$\forall f \in L^2,\quad ||\phi_f||_2 \leq K||f||_2.$$

   Dans toute la suite du problème, on notera H_2 l'endomorphisme continu de L^2 défini par
   $$\forall f \in L^2,\ H_2(f) = \phi_f.$$
3. (a) Montrer que pour tout couple (f,g) d'éléments de L^2, l'application $fH_2(g)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Etablir que

$$\forall f \in L^2,\ \forall x > 0,\quad \left(\int_{[x,+\infty[} \frac{1}{t} f(t)dt\right)^2 \leq \frac{1}{x}\int_{[x,+\infty[} f^2(t)dt.$$

(c) Soit f un élément de L^2. Montrer que l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui à x fait correspondre $\displaystyle\int_{[x,+\infty[} \frac{1}{t} f(t)dt$ est bien définie et appartient à L^2.

4. Soit f dans L^2. Montrer l'existence d'un unique élément f^* de L^2 tel que :

$$\forall g \in L^2,\ \int_{]0,+\infty[} f H_2(g) = \int_{]0,+\infty[} f^* g.$$

5. Montrer que l'application $L_2 : L^2 \to L^2$ qui à f associe f^* est linéaire et continue.
6. Etablir l'égalité $|||L_2||| = |||H_2|||$.

V – Cinquième partie

On utilise dans cette partie les endomorphismes H_2 et L_2 de L^2 introduits dans la partie IV.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^p$ de la structure euclidienne canonique ; le produit scalaire est défini par $< (x_1, \ldots, x_p)|(y_1, \ldots, y_p) >= \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k y_k$, et la norme euclidienne est notée n_2.
   Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$.
   (a) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ tel que $n_2(Ax) = |||A|||n_2(x)$
   (b) Montrer que tout élément de $\mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ vérifiant l'égalité précédente est un vecteur propre de $A^* o A$, où A^* est l'adjoint de A pour la structure euclidienne de $\mathbb{R}^p$.
2. Etablir que si $f \in L^2 \backslash \{0\}$ vérifie $||H_2(f)||_2 = |||H_2|||\, ||f||_2$ alors f est un vecteur propre de $L_2 o H_2$.
3. Montrer qu'un tel élément ne peut exister et que $\sup\left\{\dfrac{||H_2(f)||_2}{||f||_2},\ \ f \in L^2 \backslash \{0\}\right\}$ n'est pas atteint.
   Indication : On pourra étudier l'appartenance à L^2 des solutions d'une équation différentielle.
4. Montrer de même qu'il ne peut exister un élément $f \neq 0$ dans L^2 tel que $||L_2(f)||_2 = |||L_2|||\, ||f||_2$.